

# Tolérancement inertiel pour processus à dérive

## Optimiser le tolérancement statistique

Maurice Pillet  
Eric Pairel  
Stephane Tichadou  
Université de Savoie Mont Blanc  
Laboratoire SYMME  
Annecy, France  
[Maurice.pillet@univ-savoie.fr](mailto:Maurice.pillet@univ-savoie.fr)  
[Eric.pairel@univ-savoie.fr](mailto:Eric.pairel@univ-savoie.fr)  
[Stéphane.tichadou@univ-savoie.fr](mailto:Stéphane.tichadou@univ-savoie.fr)

Renald Vincent  
Pôle EME  
Cetim  
Senlis, France  
[Renald.vincent@cetim.fr](mailto:Renald.vincent@cetim.fr)

**Résumé** – Le tolérancement statistique commence à être très utilisé dans l'industrie. Il va être désormais possible d'indiquer de façon normalisée avec l'ISO 18391 [1] non pas le type de tolérancement lui-même, mais les exigences attachées à la population des produits. Parmi les différentes formes de tolérancement statistique, le tolérancement inertiel propose une approche originale permettant de garantir la conformité de la fonction attendue en lien avec un niveau de confiance (géré par l'indicateur  $Cpk$  sur la caractéristique résultante) en suivant une statistique unique en production : l'Inertie.

L'inertie présente l'intérêt d'accepter des productions de plus large dispersion que le tolérancement au pire des cas, mais présente l'inconvénient de ne pas laisser suffisamment d'excursion possible pour les processus à faible dispersion et à dérive. Nous proposons dans cette publication une extension du tolérancement inertiel qui permet de façon simple de répondre à cet inconvénient en donnant le maximum de variation possible à la production tant en dispersion qu'en dérive tout en garantissant la conformité  $Cpk$  sur la caractéristique résultante

**Mots clés** – Tolérancement statistique, Tolérancement inertiel  
Processus à dérive.

**Abstract**— Statistical tolerancing begins to be widely used in industry. It will be now possible indicating by a standardized manner with ISO18391 [1] not by indicating directly the type of tolerancing itself, but the requirements attached to the products population. Among the various forms of statistical tolerancing, the inertial tolerancing offers an original approach to ensure compliance of the intended function in link with a confidence level (managed by the  $Cpk$  index on the resulting characteristic) following a single statistic: Inertia.

The advantage of inertia is to accept wider variations than worst case tolerancing. The disadvantage is ton constraint excursion possible for process with low dispersion and drift. In this paper, we propose an extension of inertial tolerancing allows simple way to answer this problem by giving the maximum possible variation in production both in dispersion in drift while ensuring compliance  $Cpk$  on the resulting characteristic

**Index Terms**—statistical tolerancing, Inertial tolerancing, drift process.

### I. INTRODUCTION

Le tolérancement statistique est apparu de façon significative dès le début de la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle comme un moyen d'assurer une production de qualité à moindre coût. Plusieurs auteurs [2][3] défendent l'idée de diminuer les coûts de production par une approche statistique dans le processus d'allocation des tolérances. Depuis, de nombreuses publications ont été réalisées sur le sujet et plusieurs états de l'art ont synthétisé les avancées dans ce domaine [4][5][6][7]. Pourtant cette pratique n'a pas été largement utilisée dans les entreprises et vient tout juste d'être normalisée au niveau français NF E 04-008 [8]. L'ISO 18391 [1] quant à elle n'a pas retenue l'indication du mode de tolérancement, mais uniquement l'indication des exigences sous-jacentes en lien avec la population des produits. Ceci permet d'envisager une utilisation plus large encore des indications proposées.

Le tolérancement statistique est peu employé aujourd'hui comparé au tolérancement arithmétique. Une explication potentielle à cette pratique limitée tient à ses risques associés en cas de production conforme aux tolérances, mais dont la moyenne est décentrée par rapport à la cible et qui n'était associé à aucune exigence spécifique. Le tolérancement statistique quadratique traditionnellement présenté dans la littérature uniquement par sa voie calculatoire sans prise en compte des hypothèses de calcul (que nous qualifierons de tolérancement quadratique aveugle) ne garantit pas la conformité de la caractéristique résultante. Pour compenser ce défaut plusieurs approches ont été présentées telles que le tolérancement sur la moyenne [9], le tolérancement inertiel [10], des tolérancements semi quadratique [11] et [12]. Ces approches de tolérancement permettent de réduire le champ de variation, soit de l'excursion possible de la moyenne par rapport à la cible, soit de la dispersion admissible, soit des deux, pour mieux garantir la conformité de la caractéristique résultante. Suivant les approches on trouve des configurations défavorables qui ne garantissent pas cette conformité.

Nous proposons dans cet article une approche qui permet de compléter ces solutions possibles et qui possède

l'avantage de donner le plus grand domaine possible de variation de l'excursion de la moyenne par rapport à la cible et de l'écart-type pour chacune des caractéristiques produit en lien avec la caractéristique résultante sur l'assemblage sur laquelle est garantie un niveau de confiance donné et quantifié via l'indicateur de capabilité.

## II. TOLERANCEMENT INERTIEL

Le tolérancement inertiel a été présenté la première fois en 2001 [11]. Il permet d'utiliser le tolérancement statistique tout en garantissant un niveau de qualité Cpk sur la caractéristique résultante en surveillant une statistique unique durant la production : l'inertie. L'inertie est une statistique de population qui est estimée par la moyenne des écarts quadratiques des valeurs à la cible. L'inertie est aussi définie par la relation (1). Elle correspond à la notion d'efficacité en statistique, cumulant sous forme quadratique le biais et la variance de l'estimateur d'une variable .

$$I = \sqrt{\sigma^2 + \delta^2} \quad (1)$$

Avec  $\sigma$  l'écart-type de la population et  $\delta$  l'écart entre la moyenne et la cible. Le tolérancement inertiel consiste définir sur chacune des caractéristiques élémentaires la valeur maximale de cette statistique de population pour garantir un Cpk sur la caractéristique résultante. On montre que :

- L'inertie est égale à l'écart-type lorsque la production est centrée sur la cible ( $\delta = 0$ )
- L'inertie est égale au décentrage maximum admissible lorsque la production a un écart-type nul ( $\sigma = 0$ )
- La zone de conformité inertielle d'une population d'un des composants produit est représentée dans un graphe ( $\delta, \sigma$ ), par l'espace inscrit dans un demi-cercle de rayon  $I_{MAX}$  ("Fig. 1"). Pour un écart type donné, on peut facilement calculer « l'excursion possible » de la moyenne de la population qui représente l'intervalle dans lequel doit se situer la moyenne pour que l'inertie soit acceptable.

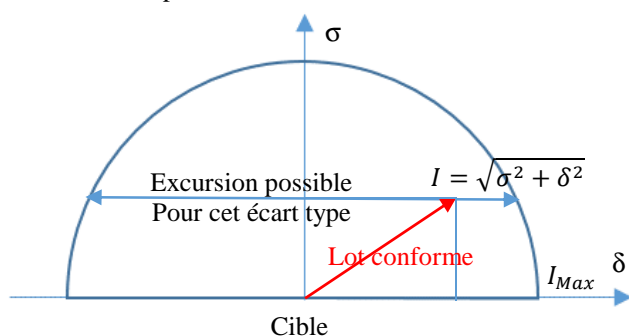


Fig. 1. Inertie dans un graphe  $\delta, \sigma$

La détermination de l'inertie maximale se fait en considérant la situation d'une production centrée. Considérons le cas d'une

relation linéaire reliant les caractéristiques élémentaires  $X_i$  à la caractéristique résultante  $Y$  (2)

$$Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \quad (2)$$

Dans l'hypothèse d'indépendance des caractéristiques élémentaires on peut écrire l'équation (3)

$$Var(Y) = \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 Var(X_i) \quad (3)$$

On en déduit l'inertie maximale sur chacune des caractéristiques élémentaires en appliquant la relation (4)

$$I_{X_iMax}^2 = Var(X_i) \quad (4)$$

Dans le cas où les  $\alpha_i$  sont égaux à  $\pm 1$  et dans le cas d'une équi-répartition entre toutes les caractéristiques élémentaires on en déduit :

$$I_{X_iMax} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

Pour garantir un Cpk sur la caractéristique résultante, il faut toutefois appliquer un coefficient correcteur (6) à cette inertie tel que l'a proposé Adragna [13]. On parlera alors de « tolérancement inertiel corrigé ».

$$C = \frac{Cp_{iX_i}}{\sqrt{Cpk_{\gamma}^2 + \frac{n}{9}}} \quad (6)$$

Avec

- $Cpk_{\gamma}^2$  : Le Cpk minimal recherché sur l'exigence fonctionnelle  $Y$
- $Cp_{iX_i}$  : Le Cpi minimal exigé sur les caractéristiques élémentaires ( $Cp_i = I_{X_{iMax}} / I_{Réalisé}$ )
- $n$  nombre d'éléments dans la relation linéaire

## III. TOLERANCEMENT SEMI QUADRATIQUE A ECART TYPE MAXI

Dans le cas d'assemblage de peu de composants, le tolérancement inertiel corrigé réduit de façon importante l'excursion possible de la moyenne. Dans le cas de processus à dérive, mais de faible dispersion, l'approche contraint la dérive possible de la moyenne et peut contraindre à des changements d'outillages et à des interventions coûteuses. Taylor [9], Anselmetti [11] et Judic [12] ont ainsi proposé une approche qui – sous contrainte d'écart-type faible – permet de donner plus de liberté à l'excursion de la moyenne. Le principe de ce tolérancement consiste à calculer l'excursion maximale permise sous condition de capabilité du processus.

On fixe l'écart type maximal de population  $\sigma_{XMax}$  sur chacun des composants : cela permet de calculer la dispersion maximale de  $Y$ . Cette dispersion permet de déduire l'excursion possible sur  $Y$  et ainsi de la répartir sur chacun des composants pour définir les  $\delta_{XMAX}$ . La conformité sera déterminée pour chaque composant en vérifiant les deux hypothèses (Fig 2)

- l'écart-type est inférieur à l'écart-type maximal fixé dans les calculs  $\sigma_{XMax}$ .
- la moyenne de la population de chaque composant est dans l'intervalle permis ( $\delta_{XMAX}$ )

Dans ce cas de tolérancement, la zone de conformité d'une population d'un des composants produit est ainsi représentée dans un graphe  $\delta, \sigma$ , par l'espace inscrit dans un rectangle (fig 2)

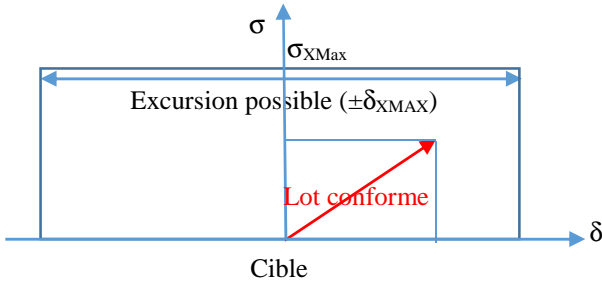


Fig. 2. Domaine de conformité pour l'approche semi quadratique

IV. DOMAINE D'UNE TOLERANCE STATISTIQUE

Pour définir le domaine d'une tolérance statistique, nous proposons de fixer les hypothèses suivantes :

- La caractéristique résultante  $Y$  a ses tolérances supérieures et inférieure définies par : *Cible  $\pm T_Y$*
- La relation, liant la caractéristique fonctionnelle aux caractéristiques élémentaires, est linéaire (Equation (2))
- L'intervalle de référence de la population  $Y$  est défini avec  $Y_{99,865\%}$  et  $Y_{0,135\%}$  considérés à  $\mu \pm 3\sigma$
- Les coefficients  $\alpha_i$  sont égaux à +1 ou -1
- Les écart-types de chaque caractéristique élémentaire sont identiques et égaux à  $\sigma_x$
- Les décentrages de chaque caractéristique élémentaire sont identiques et égaux à  $\delta_x$
- Les caractéristiques élémentaires sont indépendantes (absence de corrélation).

Dans ces conditions on peut calculer le décentrage et la variance de la caractéristique résultante  $Y$  :

$$\delta_Y = \sum_{i=1}^n \delta_X = n \delta_X \quad (7)$$

$$V_Y = \sum_{i=1}^n V_X = n V_X \quad (8)$$

Pour obtenir le  $Cpk$  mini sur la caractéristique résultante  $Y$ , on doit satisfaire :

$$Cpk_{mini} = \frac{T_Y - \delta_Y}{3\sqrt{V_Y}} \quad (9)$$

La variance limite est donc :

$$\sqrt{V_Y} = \frac{T_Y}{3Cpk_{mini}} - \frac{\delta_Y}{3Cpk_{mini}} \quad (10)$$

Avec les hypothèses précédentes, en divisant l'équation précédente par  $n$  on en déduit la relation de conformité sur les caractéristiques élémentaires  $X_i$  :

$$\sqrt{V_X} = \frac{T_Y}{3\sqrt{n}Cpk_{mini}} - \frac{\delta_X\sqrt{n}}{3Cpk_{mini}} \quad (11)$$

Cette dernière équation est celle du triangle grisée (figure 3) dans l'espace  $(\delta, \sigma)$ . Dans le cas favorable des hypothèses de ce calcul nous pouvons définir, par ce triangle, le

domaine maximal de conformité dans l'espace  $(\delta, \sigma)$  pour les caractéristiques élémentaires. Ce triangle ne garantit pas la conformité si on sort des hypothèses mais servira de benchmark pour évaluer différentes approches de tolérancement.

En effet si les décentrages et les écarts-types des caractéristiques élémentaires sont différents pour chaque  $X_i$  (ce qui est évidemment très probable), il est possible d'avoir la caractéristique résultante au-delà de ses spécifications impliquant une condition fonctionnelle non satisfaite. Mais ce triangle est important car il représente l'enveloppe des solutions permettant de garantir la conformité sur l'exigence fonctionnelle  $Y$ .

Par rapport à ce triangle on peut tracer les domaines pour les 4 types de tolérancement (pire des cas, statistique quadratique aveugle, inertiel, semi quadratique à écart type maxi et inertiel corrigé).

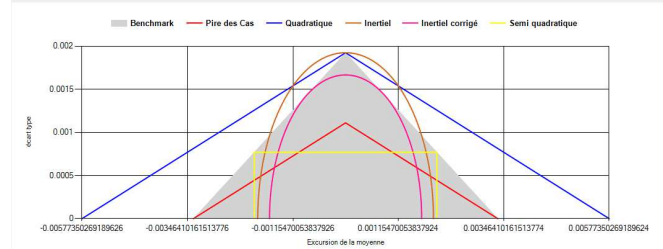


Fig. 3. Quatre domaines de conformité sur les  $X_i$

La figure 3 donne ces quatre domaines pour un assemblage de trois composants ( $n = 3$ ). Elle montre clairement que seules les approches « pire des cas », « semi quadratique » et « inertiel corrigé » sont à l'intérieur du triangle benchmark et garantissent la conformité de la caractéristique fonctionnelle. Les approches « quadratique aveugle » et « inertiel » ne garantissent pas le  $Cpk$  mini sur la caractéristique résultante.

Le tableau I montre le calcul des domaines par rapport au domaine « benchmark » pour  $n$  variant de 2 à 9. Le tableau II donne les excursions permises par rapport à celle du benchmark.

TABLE I. RATIO DES DOMAINES

n	Benchmark	Pire des cas	Quadratique aveugle	Inertiel	Inertiel Corrigé	Semi-quadratique $\sigma_{maxi}$ fixé
2	100%	71%	141%	74%	61%	49%
3	100%	58%	173%	91%	68%	46%
4	100%	50%	200%	105%	72%	44%
5	100%	45%	224%	117%	75%	43%
6	100%	41%	245%	128%	77%	41%
7	100%	38%	265%	139%	78%	40%
9	100%	33%	300%	157%	79%	38%

TABLE II. RATIO DES EXCURSIONS ACCEPTABLES DE LA MOYENNE

n	Benchmark	Pire des cas	Quadratique aveugle	Inertiel	Inertiel Corrigé	Semi-quadratique $\sigma_{\text{maxi}} \text{ fixé}$
2	100%	100%	141%	47%	43%	59%
3	100%	100%	173%	58%	50%	63%
4	100%	100%	200%	67%	55%	67%
5	100%	100%	224%	75%	60%	69%
6	100%	100%	245%	82%	63%	71%
7	100%	100%	265%	88%	66%	73%
9	100%	100%	300%	100%	71%	75%

La conclusion de ces deux comparaisons est que si on veut garantir un  $Cpk$  sur la condition fonctionnelle trois approches sont possibles : Le pire des cas, l'inertiel corrigé et le semi quadratique.

En termes de domaine disponible l'inertiel corrigé l'emporte largement quelle que soit le nombre de caractéristiques élémentaires  $n$ . En revanche, en terme d'excursion maximale permise par la moyenne le semi quadratique l'emporte sur l'inertiel corrigé.

Nous allons proposer dans la suite de cet article deux approches visant à garantir le  $Cpk$  sur l'exigence fonctionnelle résultante  $Y$  tout en permettant l'excursion maximale de la moyenne en contraignant le moins possible la dispersion sur les  $X_i$ . Il faut pour cela maximiser le domaine utilisé et le ratio des décentrages extrêmes tout en restant dans le domaine du benchmark pour garantir le  $Cpk$  sur la caractéristique résultante.

V. APPROCHE DE L'INERTIEL PONDERE

A. Principe

L'approche *inertielle pondérée* a été introduite en 2005 [14]. Elle consiste à pondérer l'excursion de la moyenne par un coefficient  $w$

$$I_w = \sqrt{\sigma^2 + w\delta^2} \tag{12}$$

Le tolérancement inertiel définit une inertie maximale permise qui dans le graphe  $\delta/\sigma$  correspond à la frontière du domaine d'acceptation dont l'équation est un cercle. Le tolérancement inertiel pondéré aboutit à définir quant à lui comme frontière d'acceptabilité l'équation d'une ellipse. En effet (12) peut aussi s'écrire :

$$\frac{\sigma^2}{I_w^2} + \frac{w\delta^2}{I_w^2} = 1 \tag{13}$$

Donc le foyer de l'ellipse est  $b = w/I_w^2$  et  $a = 1/I_w^2$

L'approche que nous proposons dans cet article définit le coefficient de pondération  $w$  à partir d'un point critique  $(x_0, y_0)$  sur la droite du triangle de benchmark (figure 4)

Par exemple l'excursion maximum de la moyenne peut être définie, comme en semi-quadratique à  $\sigma_{\text{maxi}}$  fixé, par une proportion de l'intervalle de tolérance au pire des cas (exemple 0.6  $\delta_{\text{pire des cas}}$ ) ou par un ratio souhaité entre l'excursion maximale de la moyenne et l'écart-type maximal autorisé.

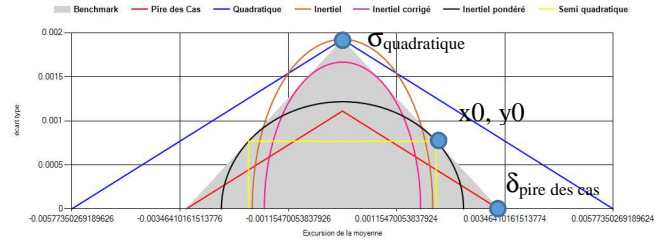


Fig. 4. Principe de l'inertiel pondéré

La figure 4 montre bien l'intérêt de l'ellipse (en noir) par rapport au rectangle (en jaune) correspondant à l'approche semi-quadratique à  $\sigma_{\text{maxi}}$  fixé : le domaine est maximisé tout en permettant une excursion maximale encore plus grande que l'approche « rectangle »

Le calcul du coefficient de pondération  $w$  est obtenu à partir de l'équation de l'ellipse (eq 14) et de la tangente de l'ellipse au point  $(x_0, y_0)$  (eq 15).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{14}$$

$$\frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} \tag{15}$$

La tangente de l'ellipse doit être égale à la pente  $k$  de la droite de benchmark au point critique  $x_0 y_0$ . On peut donc écrire

$$\frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} = \frac{\delta_{\text{pire des cas}}}{\sigma_{\text{quadratique}}} \tag{16}$$

La solution de ces deux équations donne les foyers de l'ellipse : a et b

$$a = \sqrt{\frac{x_0 y_0}{k} + x_0^2} \quad b = \sqrt{y_0^2 + k x_0 y_0} \tag{17}$$

L'acceptation d'un lot en inertiel pondéré consiste alors à vérifier que les paramètres de population ( $\delta$  et  $\sigma$ ) sont tels que l'inertie pondérée reste à l'intérieur de l'ellipse. Nous avons deux valeurs à calculer :

1. Le poids  $w$  à appliquer
2. L'inertie maximale acceptable

$$w = \frac{b^2}{a^2} = \frac{y_0^2 + k x_0 y_0}{\frac{x_0 y_0}{k} + x_0^2} \tag{18}$$

Avec  $k = \frac{\sigma_{\text{quadratique}}}{\delta_{\text{pire des cas}}}$

La conformité se définit par une inertie pondérée maximale  $I_w$  calculée au point  $x_0$  et  $y_0$  soit :

$$I_{wMAX} = \sqrt{Y_0^2 + w X_0^2} \tag{19}$$

Le tableau III donne le poids  $w$  à appliquer pour différentes configurations en fonction :

- du nombre de caractéristiques dans la relation linéaire  $n$ .
- de la proportion de l'intervalle de tolérance au pire des cas que l'on souhaite affecter à l'excursion de la moyenne

TABLE III. TABLE DES COEFFICIENTS W

w	Proportion de l'intervalle de tolérance au pire des cas							
n	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
2	0.89	0.52	0.33	0.22	0.15	0.1	0.06	0.02
3	1.33	0.78	0.5	0.33	0.22	0.14	0.08	0.04
4	1.78	1.04	0.67	0.44	0.3	0.19	0.11	0.05
5	2.22	1.3	0.83	0.56	0.37	0.24	0.14	0.06
6	2.67	1.56	1	0.67	0.44	0.29	0.17	0.07
7	3.11	1.81	1.17	0.78	0.52	0.33	0.19	0.09
8	3.56	2.07	1.33	0.89	0.59	0.38	0.22	0.1
9	4	2.33	1.5	1	0.67	0.43	0.25	0.11

Un coefficient  $w = 1$  correspond au cas inertiel corrigé. Il est donc inutile de prendre un coefficient inférieur à 1. Plus le coefficient est faible, plus l'ellipse est aplatie.

**B. Application sur un assemblage de deux composants**

On souhaite un jeu de 0.06 mm sur l'assemblage final d'un axe avec un alésage avec une capabilité minimal  $Cpk = 1$ .

**Tolérancement au pire des cas**

Ce tolérancement permet une tolérance de  $\pm 0.015$  sur chacun des composants ( $\pm 0.03/2$ ) soit un décentrage maximal :

$$\delta_{pire\ des\ cas} = 0.015$$

**Tolérancement statistique quadratique**

L'écart type maximal dans le cas quadratique est :

$$\sigma_{quadratique} = 0.0071$$

Soit une tolérance de  $\pm 3\sigma = \pm 0.021$

**Tolérancement inertiel**

La notation sur un dessin peut se faire facilement avec la nouvelle norme ISO 18391[1]. Le tolérancement inertiel s'écrit :

$$nominal \pm 0.021 \langle ST \rangle I < 0.0071$$

L'interprétation est la suivante :

- toutes les caractéristiques doivent être incluses dans l'intervalle  $\pm 0.021$
- la statistique de population I doit être inférieure à 0.0071

**Tolérancement inertiel corrigé**

L'inertie maximale serait de

$$I = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{9}}} = 0.0064$$

Le tolérancement inertiel corrigé s'écrit :

$$nominal \pm 0.021 \langle ST \rangle I < 0.0064$$

**Tolérancement semi quadratique à  $\sigma_{maxi}$  fixé**

En semi quadratique à  $\sigma_{maxi}$  fixé on souhaite (par exemple) une excursion de la moyenne de 80% de l'intervalle au pire des cas soit

$$\delta_x = 0.8 \times 0.015 = 0.012$$

Il faut alors imposer un écart type sur la production

$$\frac{\delta_{pire\ des\ cas} - \delta_x}{\sigma_x} = \frac{\delta_{pire\ des\ cas}}{\sigma_{quadratique}}$$

$$\sigma_x \leq \frac{(\delta_{pire\ des\ cas} - \delta_x) \cdot \sigma_{quadratique}}{\delta_{pire\ des\ cas}} = 0.0014$$

La tolérance individuelle peut être calculée à partir du point  $(X_0, Y_0)$  par la relation :

$$T = \pm X_0 + 3 \cdot Y_0 \text{ soit } \pm 0.0162$$

Le tolérancement semi quadratique s'écrit :

$$nominal \pm 0.0162 \langle ST \rangle \delta_x < 0.0064 / \sigma_x < 0.0014$$

**Tolérancement inertiel pondéré**

En inertiel pondéré on calcule  $w$  et  $I_w$  à partir du point critique :

$$x_0 = \delta_x = 0.012$$

$$y_0 = \sigma_x = 0.0014$$

$$k = 0.1167$$

On trouve :

$$w = \frac{b^2}{a^2} = \frac{y_0^2 + kx_0y_0}{\frac{x_0y_0}{k} + x_0^2} = 0.0556$$

$$I_w = \sqrt{y_0^2 + wx_0^2} = 0.00316$$

La tolérance individuelle peut être calculée à partir du point  $(X_0, Y_0)$  par la relation :

$$T = \pm X_0 + 3 \cdot Y_0 \text{ soit } \pm 0.0162$$

Le tolérancement inertiel pondéré s'écrit :

$$nominal \pm 0.0162 \langle ST \rangle I_{(w,0.056)} \leq 0.0032$$

**VI. COMPARAISON AVEC LES APPROCHES EXISTANTES**

Pour réaliser une comparaison entre les approches, nous ne comparerons que les approches garantissant un  $Cpk$  sur l'exigence fonctionnelle, soit :

- Approche au pire des cas ;
- Approche inertielle corrigée ;
- Approche inertielle pondérée avec une excursion permise de 60% de la tolérance pire des cas ;
- Approche semi-quadratique à écart type fixé.

Nous utiliserons comme éléments de comparaison :

- La tolérance permise pour les valeurs individuelles ;
- Le domaine relatif par rapport au « triangle benchmark » ;
- L'excursion maximum pour la moyenne ;
- La dispersion maximale admise.

L'approche idéale serait celle qui maximise ces critères pour laisser plus de degrés de liberté à la production.

Le tableau IV résume les résultats obtenus en fonction du nombre de composants  $n$  dans la relation linéaire. On note la bonne performance de l'inertiel pondéré en terme de domaine couvert. L'inertiel pondéré donne un compromis idéal entre



excursion et dispersion. L'IT sur Y pour les calculs est égal à  $\pm 10$  unités.

TABLE IV. COMPARAISON DES APPROCHES GARANTISSANT CPK

n	Pire des cas	Inertiel corrigé	semi quadratique à écart type fixé	Inertiel pondéré
	Tolérance pour valeurs individuelles ( $\pm$ )			
2	5	6.4	5.8	5.8
3	3.3	5	4.3	4.3
5	2	3.6	3	3
8	1.3	2.6	2.2	2.2
Excursion maximale				
2	5	2.1	3	3.9
3	3.3	1.7	2	2.6
5	2	1.2	1.2	1.5
8	1.3	0.9	0.8	1
Ecart type maximal				
2	1.7	2.1	0.9	1.5
3	1.1	1.7	0.8	1.2
5	0.7	1.2	0.6	0.9
8	0.4	0.9	0.5	0.7
Domaine couvert du domaine « benchmark »				
2	70.7%	60.6%	48.0%	77.0%
3	57.7%	68.0%	48.0%	77.0%
5	44.7%	75.3%	48.0%	77.0%
8	35.4%	78.4%	48.0%	77.0%

La figure 5 donne les représentations des domaines des différentes approches en fonction du nombre de composants  $n$  dans la relation linéaire.

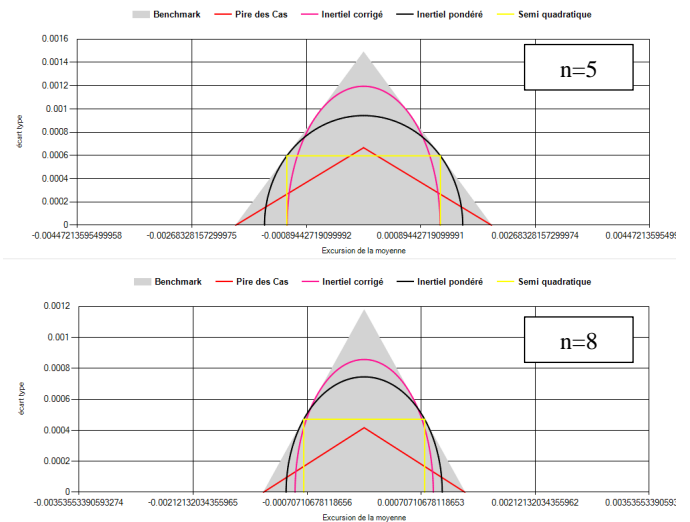
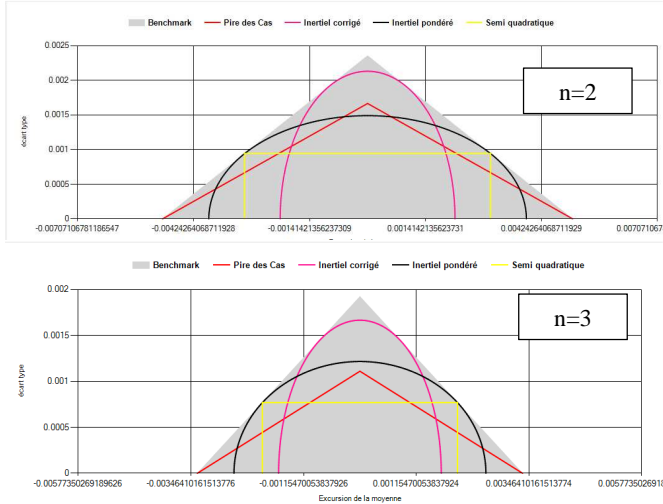


Fig. 5. Domaine couvert par les différentes approches

Pour valider ces résultats, nous avons réalisé une simulation avec un tirage de 500 000 assemblages conformes suivant les différentes approches pour  $n = 3$ . Les données ont été calculées avec une répartition uniforme à l'intérieur du domaine de conformité. Les figures 6 à 9 affichent le résultat obtenu sur la caractéristique résultante. On vérifie bien que le  $Cpk$  est garanti pour chacune des solutions mais que le domaine couvert par chacune des solutions est très différent d'une approche à l'autre.

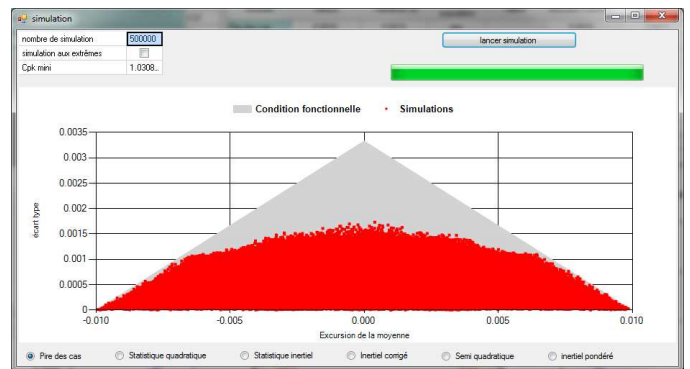


Fig. 6. Simulation pour le pire des cas

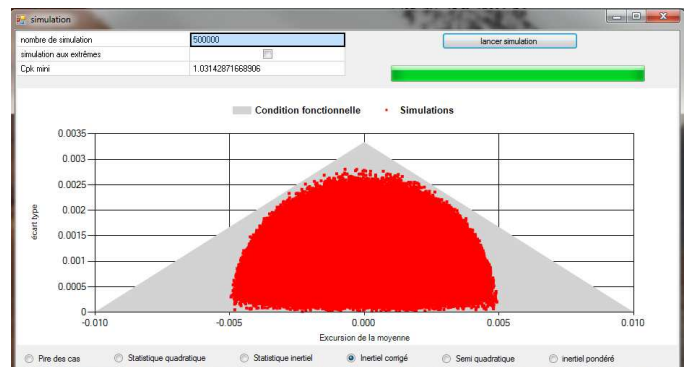


Fig. 7. Simulation pour l'inertiel corrigé

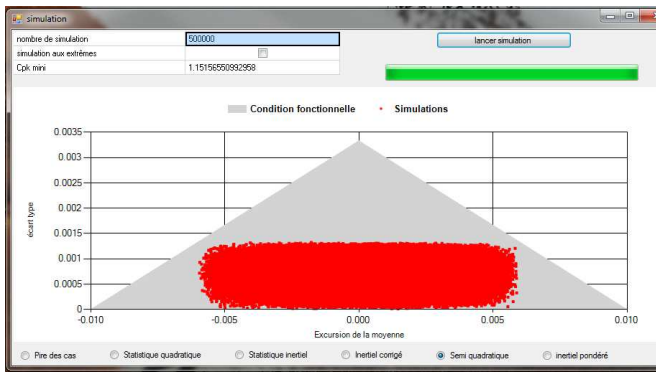


Fig. 8. Simulation pour le semi-quadratique

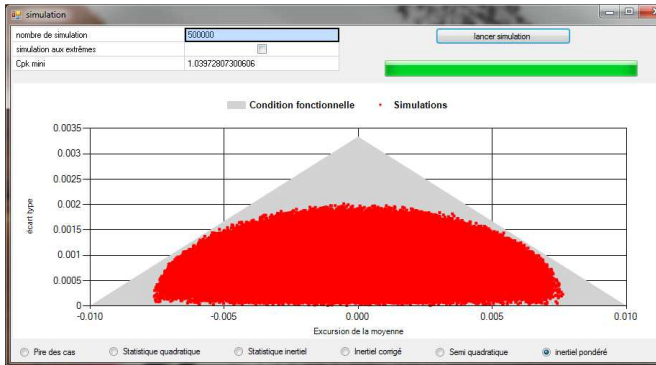


Fig. 9. Simulation pour l'inertiel pondéré

## II. APPROCHE NE GARANTISSANT PAS LE CPK

Les approches présentées précédemment avaient comme objectif de garantir le Cpk sur la caractéristique résultante quels que soient les assemblages conformes. Dans la mesure où l'on peut prendre quelques risques sur l'assemblage final, on peut encore agrandir le domaine d'acceptation en limitant simplement l'excursion sur la moyenne. Nous appelons cette méthode « **Statistique Maximale** ». Le principe consiste à donner l'ensemble du triangle de benchmark comme zone de conformité, en excluant seulement les zones d'excursion maximale (voir figure 10). La forme de la zone de conformité prend alors la forme d'un triangle tronqué.

TABLE V. LIMITE D'EXCURSION

Taille de la chaîne de cotes	Limite d'excursion	Condition sur sigma
2	0.65 IT <sub>pire des cas</sub>	$\sigma < \sqrt{n}(T - \delta)$
3	0.70 IT <sub>pire des cas</sub>	
4	0.75 IT <sub>pire des cas</sub>	
5	0.80 IT <sub>pire des cas</sub>	
6	0.85 IT <sub>pire des cas</sub>	
$\geq 7$	0.9 IT <sub>pire des cas</sub>	

L'excentration maximale de la moyenne permise dépend du nombre de composants dans la chaîne, le tableau V donne l'excentration maximale permise sur la moyenne en fonction de la taille des échantillons. Ces coefficients ont été obtenus de façon expérimentale à partir de simulations. La condition sur l'écart type permet de vérifier que l'on reste à l'intérieur du

triangle.  $T$  est la demi-tolérance au pire des cas,  $\delta$  l'excursion de la moyenne et  $n$  le nombre de maillons dans la chaîne.

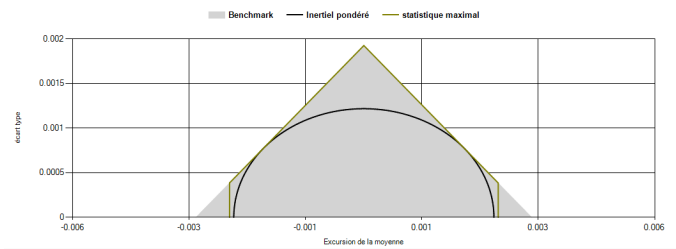


Fig. 10. Domaine de conformité « Statistique maximale »

La figure 11 donne le résultat des simulations d'assemblages pour les cas les plus critiques ( $n = 2, 3$  et  $4$ ). On note un Cpk minimal obtenu  $< 1$  contrairement aux simulations précédentes, mais le domaine de conformité est néanmoins maximal et les points qui sortent du triangle restent néanmoins très proches de la zone de conformité.

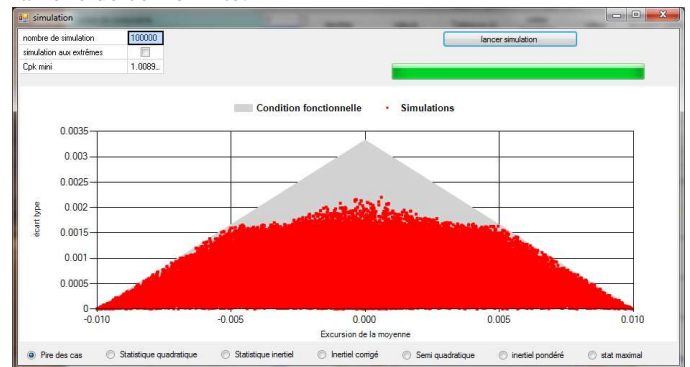


Fig. 11. Statistique maximale  $n = 2$

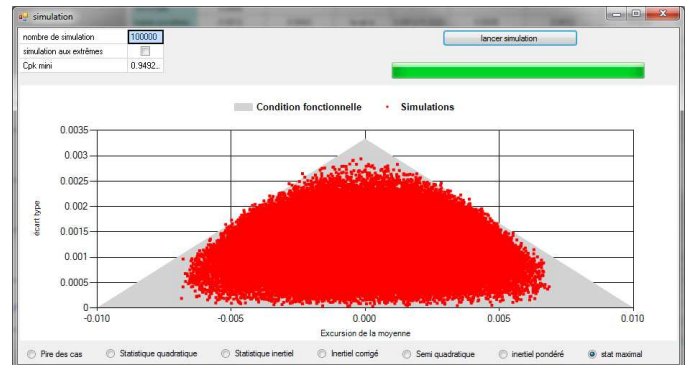


Fig. 12. Statistique maximale  $n = 3$

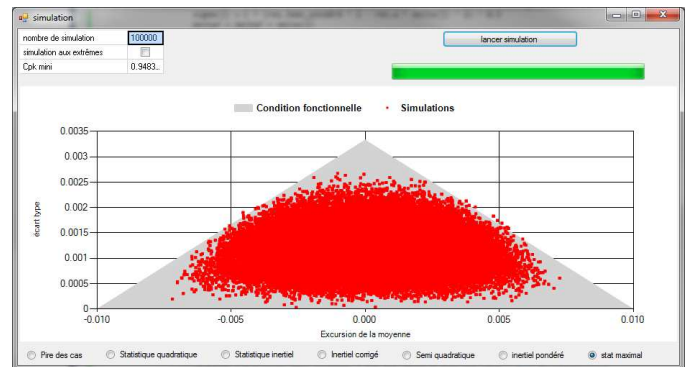


Fig. 13. Statistique maximale  $n = 4$

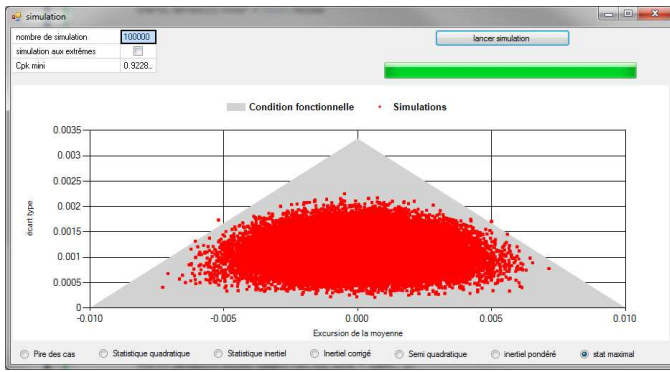


Fig. 14. Statistique maximale n = 8

Le critère d'acceptation de la population liée à la caractéristique produit élémentaire se ferait sur la base de deux exigences en lien avec les paramètres de population:

- la moyenne comprise dans l'intervalle  $[-K, K]$
- En considérant une équi-répartition entre les  $n$  caractéristiques élémentaires le couple  $\delta, \sigma$  est tel que l'on vérifie :

$$\sqrt{n}\sigma + n\delta < IT \text{ fonctionnelle} / 2$$

D'un point de vue pratique cela s'indique de la façon suivante :

$$10 \pm 0.016 \boxed{ST} SM(2, 0.1, \delta < 0.0.3)$$

Qui s'interprète de la façon suivante :

- la moyenne comprise dans l'intervalle  $[-0.03, 0.03]$
- le couple  $\delta, \sigma$  est tel que l'on vérifie

$$\sqrt{2}\sigma + 2\delta < 0.1$$

Cette approche, un peu plus compliqué sur le plan de la décision de conformité, permet un très large domaine d'acceptation ce qui peut permettre de réduire de façon importante les coûts de production.

### III. CONCLUSION

Dans cette article nous avons proposé deux approches permettant d'étendre l'intérêt « du » tolérancement statistique avec soit l'objectif de garantir l'exigence fonctionnelle sur la caractéristique résultante, soit simplement de garantir une bonne qualité d'assemblage mais en donnant le plus de liberté possible à la production. L'application du tolérancement statistique non aveugle relativement aux exigences de population est rendue possible avec l'arrivée d'une normalisation internationale sur le sujet. Elle ne limite pas les modes de tolérancement et peut permettre la mise en place de ces nouveaux modes de

tolérancement qui ne nécessitent comme contrainte que de vérifier au-delà de la conformité des pièces, la conformité de critères statistiques de population qui peuvent être des paramètres de population ( $\mu, \sigma$ ), ou des critères combinés et ceci en valeur relative ou en valeur absolue.

### REFERENCES

- [1] PR NF EN ISO 18391 Septembre 2014 - Spécification géométrique des produits - Spécification de population
- [2] E. W. Pike, T. R. Sillverberg, Assigning Tolerances for maximum Economy, mach. Design, 25, p 139, sept., 1953
- [3] D. H. EVANS, Optimum tolerance assignment to yield minimum manufacturing cost. Bell System Technical Journal, 1958, vol. 37, no 2, p. 461-484.
- [4] EVANS, E. H. Statistical tolerancing: the state of the art. Journal of Quality Technology, 1974, vol. 6, no 4, p. 188-195.
- [5] ZHANG, H. C. et HUQ, M. E. Tolerancing techniques: the state-of-the-art. The International Journal Of Production Research, 1992, vol. 30, no 9, p. 2111-2135.
- [6] HONG-CHAO ZHANG (ed.). Advanced tolerancing techniques. John Wiley & Sons, 1997.
- [7] NIGAM, Swami D. et TURNER, Joshua U. Review of statistical approaches to tolerance analysis. Computer-Aided Design, 1995, vol. 27, no 1, p. 6-15.
- [8] NF E 04-008 – Octobre 2013 - Spécification géométrique des produits (GPS) Calcul de tolérance, indications et critères d'acceptation Méthodes arithmétique, statistique quadratique et statistique inertielle
- [9] W. A. Taylor, "Process tolerancing: a solution to the dilemma of worst-case versus statistical tolerancing", Presented at Fall Technical Conference, 1993, Available from: <http://www.variation.com/techlib/ta-2full.html>
- [10] PILLET, Maurice. Améliorer la productivité: Déploiement industriel du tolérancement inertiel. Editions Eyrolles, 2012.
- [11] ANSELMETTI, Bernard. Manuel de tolérancement: Volume 5, Métrologie avec les normes ISO. Lavoisier, 2011.
- [12] J. M. JUDIC, Process Tolerancing: A new statistical tolerancing method for industrial processes not daily adjustable in mass production. Proposal of an improvement to Wayne Taylor's method. IDMME 2010, Bordeaux France, Oct 2010
- [13] PILLET M., BERNARD F. AVRILLON L. Le tolérancement inertiel, une autre façon d'intégrer l'aspect combinatoire dans les processus assemblés, Congrès CPI 2001, CD-ROM, Fès, Morocco, 2001, 12 pages.
- [14] PILLET, Maurice, DURET, Daniel, et SERGENT, Alain. Weighted Inertial Tolerancing. Quality Engineering, 2005, vol. 17, no 4, p. 687-693.